Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III–Curso 2019

Examen de Cálculo III

Jueves 5 de diciembre de 2019

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(x, y, z) = (xe^{z^2-2z}, \operatorname{sen}(xyz) + y + 1, e^{z^2} \operatorname{sen}(z^2))$.

   a) Calcular $G(x, y, z) := \operatorname{rot}F(x, y, z)$.

   b) Se considera una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ que tiene forma de bombilla eléctrica, orientada con la normal saliente y tal que $\partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$.

      - Hacer un bosquejo de S.
      - Calcular $\iint_S G \cdot dA$.

2. Sea $p = (1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$. Se consideran las ecuaciones

$$xy^2 + xzu - yv^2 = 1 \tag{1}$$

$$x^2y + yzv - xu = 1 \tag{2}$$

   Sean M_1 y M_2 respectivamente los conjuntos de soluciones de (1) y (2) contenidas en $(0, \infty)^5$, y sea $M := M_1 \cap M_2$.

   a) Probar que M_1, M_2 y M son variedades orientables de clase C^∞ que contienen a p, y calcular sus dimensiones.

   b) Hallar un difeomorfismo entre M_1 y M_2.

   c) Sea $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^5$ tal que $\gamma(t) := (1, 1, t, t^3, t^2)$. Probar que $p \in \gamma^* \subseteq M$.

   d) Probar que $(0, 0, 1, 3, 2)$ es un vector tangente a M en p. Calcular T_pM.

3. Considérese una variedad M. Si μ es una l-forma en M y $k \in \mathbb{Z}^+$, se define $\mu^k \in \Omega^{lk}(M)$ como $\mu^k := \overbrace{\mu \wedge \cdots \wedge \mu}^{\text{k factores}}$.

   a) Supongamos que $M = \mathbb{R}^4$ con la orientación usual. Hallar $\mu \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ tal que $\mu \wedge \mu$ es la forma de volumen.

   b) Sean $\eta \in \Omega^1(M)$, y $\omega := d\eta$. Calcular $d\big(\eta \wedge (\omega)^k\big)$.

   c) Deducir que si $\omega \in \Omega^2(M)$ es exacta, entonces ω^k también lo es, para todo $k \geqslant 1$.

   d) Supongamos que M es una variedad compacta orientable y sin borde, y que $\omega \in \Omega^2(M)$ es tal que ω^k es una forma de volumen de M. Probar que ω no es exacta (sugerencia: tener en cuenta el teorema de Stokes).

Soluciones

1. a) $G(x,y,z) = (-xy\cos(xyz), 2x(z-1)e^{z^2-2z}, yz\cos(xyz))$

   b) Como $\iint_S G\cdot dA = \iint_S \mathrm{rot}F\cdot dA$, por el teorema de Stokes se tiene

$$\iint_S G\cdot dA = \oint_{\partial S} F\cdot ds = \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0.$$

2. a) Sean $F_1, F_2 : (0,\infty)^5 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F_1(x,y,z,u,v) = xy^2 + xzu - yv^2, \quad \text{y} \quad F_2(x,y,z,u,v) = x^2y + yzv - xu,$$

   y sea $F : (0,\infty)^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F = (F_1, F_2)$. Entonces $M_i = F_i^{-1}(1)$, y $M = F^{-1}(1,1)$. Basta mostrar que 1 es valor regular de F_1 y F_2, y que $(1,1)$ es valor regular de F para deducir que M_1, M_2 y M son variedades C^∞ orientables, de dimensión 4 las primeras dos, y M de dimensión 3. Para eso es suficiente mostrar que el rango de F' es 2 en cualquier punto. Ahora:

$$F'(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x,y,z,u,v) \\ \nabla F_2(x,y,z,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+zu & 2xy - v^2 & xu & xz & -2yv \\ 2xy-u & x^2+zv & yv & -x & yz \end{pmatrix}$$

   El determinante de la matriz formada por la tercera columna y la cuarta columnas es $-x^2u - xyzv < 0$, de modo que F' tiene siempre rango 2.

   b) Es claro que el mapa $\varphi : (0,\infty)^5 \to (0,\infty)^5$ tal que $\varphi(x,y,z,u,v) = (y,x,z,v^2,u)$ es un difeomorfismo, y también que $\varphi(M_1) = M_2$.

   c) Una verificación rutinaria muestra que $F(\gamma(t)) = (1,1)$, $\forall t > 0$.

   d) Como $\gamma(1) = p$ y $\gamma* \subseteq M$, se deduce que $(0,0,1,3,2) = \gamma'(1) \in T_pM$. Por otro lado, como $F'(1,1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $T_pM = \ker DF_p$, se deduce que T_pM tiene base $\{(1,0,0,4,3), (0,1,0,5,3), (0,0,1,3,2)\}$.

3. a) Basta tomar $\mu = dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4$.

   b) $d(\eta \wedge \omega^k) = \omega^{k+1}$.

   c) Es inmediata consecuencia de la parte anterior.

   d) Si ω fuera exacta, digamos $\omega = d\eta$, entonces también lo sería la forma de volumen $\nu := \omega^k = d\big(\eta \wedge (\omega)^{k-1}\big)$, y por lo tanto

$$\pm\mathrm{Vol}(M) = \int_M \nu = \int_M d\big(\eta \wedge (\omega)^{k-1}\big) = \int_{\partial M} \omega^{k-1} = 0,$$

   lo cual es absurdo.